Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Cours d'encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Série d'Exercices** **Calcul barycentrique**	**Niveau** : 1S1/C **Professeur** : M. Diallo

Exercice 1 :

ABC est un triangle quelconque. le point I est le milieu du segment $[AB]$, le point J est le milieu du segment $[AC]$. Le point K est le symétrique de J par rapport à A et le point L vérifie : $\overrightarrow{LB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points pondères $(B\,;3)$, $(K\,;2)et\,(C\,;1)$.
2) En déduire que les points $K, I\ et\ L$ sont alignés.

Exercice 2 :

A, B, C, D sont quatre points distincts vérifiant : $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \vec{O}$; I est le barycentre de $(A\,;1)$ et $(B,2)$; J barycentre de $(A;1)$ et $(D;1)$; K le barycentre de $(B,2)\ et\ (D\,;1)$.

1. Montrer que : $3\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CD} = \vec{O}$. En déduire que C est sur la droite (ID)
2. Montrer que $\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{CB} = \vec{O}$. En déduire que C est sur la droite (JB)
3. Montrer aussi que C est sur la droite (KA)
4. Que peut-on dire de la position relative des droites $(ID), (JB)\ et\ (KA)$.

Exercice 3 :

Soit $\boldsymbol{ABCD}$ un quadrilatère quelconque, I le milieu de $[\boldsymbol{AB}]$, J le milieu de $[\boldsymbol{BC}]$, K le milieu de $[\boldsymbol{CD}]$ et L le milieu de $[\ \boldsymbol{DA}]$;

1. Montrer que la figure obtenue en joignant les milieux des quatre cotés $, J, K, L$, est un parallélogramme.
2. soit M le milieu de $[AC]\ et\ N$ le milieu de $[BD]$; montrer que le segment $[MN]$ a pour milieu le centre du parallélogramme $IJKL$.

Exercice 4 :

1. Soit ABCun triangle,B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$. I et J sont les points du segment $[BC]$ tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

a- I est le barycentre de $\{(B,b),(C,c)\}$. Déterminer b et c.

b- J est le barycentre de $\{(B,b'),(C,c')\}$. Déterminerb' et c'.

2. Soit H le point défini par $\overrightarrow{C'H} = \frac{3}{5}\overrightarrow{C'J}$. H est le barycentre de $\{(C'',t),(J,s)\}$. Déterminer t et s.
3. Montrer que H est le barycentre de $\{(A,\alpha),(B,\ \beta),(C,\delta)\}$ étant des réels à déterminer.
4. Exprimer $\overrightarrow{HI}$ en fonction de $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ puis $\overrightarrow{HB'}$ en fonction de $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HC}$
5. En déduire que l'on a $3\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{HB'} = \vec{0}$ et que les points $I, H,$ et B' sont alignés.
6. Soit K le point défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

a- Comparer $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{IK}$.

b- Soit G le barycentre du système $\{(A,1),(B,2),(C,2),(K,-1)\}$.
Préciser la position de G.

Exercice 5:

Soit ABC un triangle de centre de gravité G

1. Montrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$
2. Soit O milieu de $[BC]$ montrer que pour tout point M du plan : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{OA}$
3. Soit (C) l'ensemble des points M vérifiant :$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$
   Déterminer et construire l'ensemble (C) .

Exercice 6 :

A. Soit A, B, C trois points et a, b et c trois réels tels que $a+b+c\neq 0$. Soit G le barycentre de $\{(A,a);\ (B,b);\ (C,c)\}$

1. Démontrer que le système : $\{(A,2a+1);\ (B,2b-2);\ (C,2c+1)\}$ admet un barycentre que l'on notera K.
2. Donner une relation vectorielle qui définit K.
3. En déduire que : $a\overrightarrow{KA}+b\overrightarrow{KB}+c\overrightarrow{KC}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}}{2}$.
4. En déduire que G et K sont confondus si B est le milieu de $[AC]$.
5. En supposant que A, B et C ne sont pas alignés. Soit E le point vérifiant que $ABCE$ est un parallélogramme.

a- Montrer que $\overrightarrow{GK}=\frac{\overrightarrow{BE}}{2(a+b+c)}$ en utilisant la question 2.

b- Construire G et K pour $a=c=\frac{1}{2}$ et $b=2$

B. Dans le plan, on considère le triangle ABC isocèle en A de hauteur AH tel que $AH = BC = 4\ cm$.

1. En justifiant la construction, placer le point G barycentre de $\{(A,2)\ ;\ (B,1),(C,1)\}$.
2. On désigne par M un point quelconque du plan.

a- Montrer que $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est vecteur constant et $\|\vec{V}\|=8$.

3. Déterminer et construire l'ensemble F des points M du plan tels que :$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\vec{V}\|$.
4. On considère le système $\{(A,2)\ ;\ (B,n)\ ;\ (C,n)\}$ où n est un entier naturel fixé.
   a) Montrer que G_n le barycentre de ce système existe pour tout n.
   b) Construire les points G_0, G_1 et G_2.
   c) Montrer que G_n appartient au segment $[AH]$.
   d) Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\|=n\|\vec{V}\|$.
   Montrer que E_n est un cercle qui passe par A. Construire E_n.

Exercice 7 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Soit $A(1\ ;\ 2)$ *et* $B(3,-1)$. Trouver les coefficients α *et* β vérifiant $\alpha+\beta=1$ pour que le point C intersection de la droite (AB) et l'axe des abscisses soit barycentre du système (A,α) *et* (B,β) .

2) On considère les points $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $H\left(\frac{3}{2};2\right)$ et $F\left(-1;-\frac{11}{2}\right)$

   a) Vérifier que les points E, F *et* H sont alignés.

Trouver α *et* β vérifiant $\alpha+\beta=1$ tels que H soit barycentre de (E,α) *et* (F,β)

Exercice 8 :

On se donne un triangle ABC et on désigne par G le barycentre de $(A,2)$ et $(B,3)$, par H celui de $(A,2)$, $(B,3)$ et $(C, 4)$ enfin par K celui de $(A, 2)$, $(B,3)$ et $(C, 3)$.

1) Montrer que:
   a) $\|2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}\| = 0$.
   b) Si $M \neq G$ alors $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| \neq 0$.
   c) En déduire que G réalise le minimum de $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\|$.
2) Quel point réalise le minimum de $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\|$?
3) Montrer que K réalise le minimum de $\|5\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{MC}\| = 0$.

Exercice 9 :

Soient ABC un triangle et trois réels non nuls a, b et c. On suppose que les systèmes de points pondérés (B, b) et (C, c) ; (C, c) et (A, a) ; (A,a) et (B, b) admettent des barycentres que l'on note respectivement I, J et K.

a) Démontrer que si $a + b + c = 0$ alors les droites (AI), (BJ) et (CK) sont parallèles.
b) Réciproquement démontrer que si les droites (AI), (BJ) et (CK) sont parallèles alors $a + b + c = 0$.

Application :

Soient I, J et K trois points du plan définis par: $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont parallèles.

Exercice 10 :

Partie A :

Soient trois points A, B et C du plan, on désignera par I le milieu du segment [BC]
Soit m un paramètre réel et G_m le barycentre des trois points pondérés :
(A, 1 – 2m) , (B, m) et (C, m).
1) Pour tout réel m, justifier l'existence de G_m et démontrer que G_m appartient à la médiane issue de A du triangle ABC.

2) Démontrer que l'ensemble des points G_m, quand m décrit $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, est un segment dont on précisera les extrémités.

Partie B :

Pour tout réel m et pour tout point M du plan, on considère le vecteur

$$\overrightarrow{U_m} = (1-2m)\overrightarrow{MA} + (m-1)\overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$$

1) a) Exprimer $\overrightarrow{U_m} + \overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$
   b) En déduire que $\overrightarrow{U_m}$ est un vecteur constant
2) a) Exprimer $\overrightarrow{U_m}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$
   b) En déduire que $\overrightarrow{U_m}$ n'est pas le vecteur nul et que les points B et G ne sont pas confondus.

3) Pour quelle valeurs de m le vecteur $\overrightarrow{U_m}$ est-il colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$?

Exercice 11 :

Dans un triangle ABC, soit G le barycentre de $\{(A,1),(B,1),(C,m^2)\}$

1. Montrer que $\forall$ m $\in$ IR, G existe et qu'il appartient à une droite fixe.
2. Quand m $\in]-1;1[$ encadrer $\frac{2}{m^2+2}$. En déduire que G décrit alors un segment que l'on construira.

Exercice 12 :

Soit A, B et C trois points non alignés, α, β et γ trois réels vérifiant les conditions d'existence des barycentres suivants :

G barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$;

G_1 barycentre de $\{(A,-\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$;

G_2 barycentre de $\{(A,\alpha);(B,-\beta);(C,\gamma)\}$;

G_3 barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,-\gamma)\}$.

Démontrer que les droites (AG_1) ; (BG_2) et (CG_3) sont concourantes en G.

Exercice 13 : Points réciproques

Soit ABC un triangle. On appelle A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC],[AC],[AB]$.

Soit (α,β,γ) un triplet de réels strictement positifs et G_1 le barycentre du système $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$, G_2 le barycentre du système $\left(A,\frac{1}{\alpha}\right),\left(B,\frac{1}{\beta}\right),\left(C,\frac{1}{\gamma}\right)$.

On dit que les points G_1 et G_2 sont réciproques.

1) Vérifiez que ces points G_1 et G_2 sont définis et qu'ils sont strictement intérieurs au triangle ABC.
2) On appelle :

A_1 le point d'intersection de (AG_1) et $[BC]$,

A_2 le point d'intersection de (AG_2) et $[BC]$.

On définit de même B_1, B_2, C_1 et C_2.

Exprimez le point A_1 comme barycentre des points B et C. Même question avec A_2.

3) Montrez que les points A_1 et A_2 sont symétriques par rapport A'.

Exprimez de la même façon des propriétés symétries entre B_1 et B_2 puis C_1 et C_2.

4) Montrez que l'isobarycentre G est le seul point intérieur au triangle confondu avec son point réciproque.

Exercice 14 :

Soit ABC un triangle et M un point strictement intérieur à ce triangle. Les droites (AM), (BM) et (CM) coupent les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ du triangle respectivement en $A'B'$ et C'.

1. Démontrer que : $\frac{aire(MAB)}{aire(MAC)} = \frac{A'B}{A'C}$. En déduire que A' est le barycentre du système

des points pondérés : $\{(B, aire(MAC)),\ (C, aire(MAB))\}$

2. Soit G le barycentre des points pondérés

$$\{(A, aire(MBC)), (B, aire(MAC)), (C, aire(MAB))\}$$

Démontrer que G est confondu au point M

3. Soient α, β, δ trois réels strictement positifs et K le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \delta)\}$

Démontrer en utilisant les questions précédentes que $\frac{aire(KBC)}{\alpha} = \frac{aire(KAC)}{\beta} = \frac{aire(KAB)}{\delta}$

Exercice 15 :

ABC est un triangle. On note $BC = a, CA = b\ et\ AB = c$. L'objectif de cet exercice est de trouver des réels affectés aux points $A, B\ et\ C$ tels que le centre I du cercle inscrit, l'orthocentre H ou O le centre du cercle circonscrit au triangle soient des barycentres des sommets.

Partie A : Le centre du cercle inscrit.

A' est le pied de la bissectrice de BAC. A' est donc équidistant des cotés de l'angle BAC. On note d cette distance et h la longueur de la hauteur issue de A.

1) Montrer que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ puis en déduire que A' est le barycentre de $\{(B, b), (C, c)\}$
2) B' et C' sont les pieds des bissectrices de $ABC\ et\ ACB$. Exprimer B' comme barycentre de C, A et C' comme barycentre de $A\ et\ B$.
3) Prouver que I est le barycentre de $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$

Partie B : Orthocentre et centre du cercle circonscrit

On se place dans le cas ou les angles de ABC sont tous aigus.

On pose $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{ABC} = \beta\ et\ ACB = \theta$. A_1 est le pied de la hauteur issue de A.

1) Prouver que : $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\tan\theta}{\tan\beta}$.
2) Déduisez-en que A_1 est le barycentre de $\{(B, \tan\beta), (C, \tan\theta)\}$.
3) Enoncer les résultats analogues pour les pieds $B_1\ et\ C_1$ des hauteurs issues de $B\ et\ C$.
4) Prouver que H, orthocentre de ABC est barycentre de $\{(A, \tan\alpha), (B, \tan\beta), (C, \tan\theta)\}$
5) MNP sont les milieux de $[BC], [CA] et\ [AB]$.
   a) Justifier que les médiatrices du triangle ABC sont des hauteurs du triangle MNP.
   b) Exprimer alors O comme le barycentre de $M, N\ et\ P$.
   c) Déduisez-en que O, centre du cercle circonscrit à ABC, est le barycentre $A, B\ et\ C$ affectés des coefficients que vous préciserez.

Pensée :

« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles qu'on n'ose pas le faire. C'est parce qu'on n'ose pas les faire qu'elles sont difficiles » **Henri Gougaud.**